

Αύγουστος 2019

ΘΕΜΑ 1:

Βρείτε την υλίσση της εφαιτομένης στην υαμνύση
 $x^2 + xy + y^2 = 7$ στο σημείο $(1, 2)$

ΘΕΜΑ 2:

Μ' ένα οχονί μήκους 32m θέλουμε να περιφράξουμε
ας 3 πλευρές μιας ορθογώνιας περιοχής έτσι ώστε
το αντίστοιχο εμβαδό να είναι μέγιστο. Να βρεθούν
οι διαστάσεις της ορθογώνιας περιοχής.

ΘΕΜΑ 3:

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4} \, dx$ ii) $\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}} \, dx$

ΘΕΜΑ 4:

Εξετάστε εάν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά με
το υρίτήριο του λόγου. (*)

$$\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \dots$$

σειρά

(*) Έστω η σειρά $\sum a_n$ με θετικούς όρους. Έστω κ'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

α) η σειρά συγκλίνει για $\rho < 1$

β) -||- αποκλίνει για $\rho > 1$ ή για απειρόμενο ρ

* λύσεις *

ΘΕΜΑ 4^ο:

Λύση →

$$\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \dots$$

$$a_n = \frac{n!}{3^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

$$(*) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 3^n}{n! \cdot 3^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty \leftarrow$$

από n
σερά
ανοούμε

ΘΕΜΑ 1^ο:

Λύση →

$$\eta \text{ καμπύλη: } x^2 + xy + y^2 = 7$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(7) \Rightarrow$$

$$2x + \left(x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{dx}{dx} \right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$(x+2y) \frac{dy}{dx} + 2x + y = 0 \Rightarrow (x+2y) \frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y}}$$

υπολογίζω την παράγωγο στο σημείο
(1,2)

→

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = \left. \frac{-2x-y}{2y-x} \right|_{(1,2)} = \frac{-2 \cdot 1 - 2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{-4}{3}$$

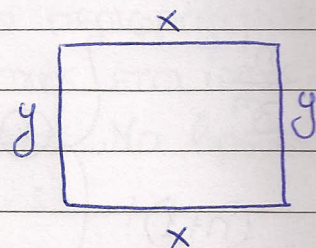
! } Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(1,2)$ είναι η ευθεία που περνάει από το σημείο $(1,2)$ με κλίση $-4/3$.

ΘΕΜΑ 2^ο :

Λύση →

$$2y+x=32 \Rightarrow y = \frac{32-x}{2}$$

$E_{\max} = ?$



$$E = x \cdot y \Rightarrow E = x \cdot \left(\frac{32-x}{2} \right) \Rightarrow E = \frac{32x}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow E = 16x - \frac{x^2}{2}$$

για να βρω την max τιμή παραγωγίζω

$$\frac{dE}{dx} = \frac{32}{2} - x$$

Όπου μηδενίζεται η παράγωγος

$$\boxed{\frac{dE}{dx} = 0}$$

έχω κ' max εμβαδόν!

⇓

$x=16$ } οι διαστάσεις
 $y=8$ } σε ορθογώνιας
 περιοχή

ΘΕΜΑ 3^ο:

Δύο →

$$\text{ii)} \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^{1/3}} dx = ?$$

$$= \int \frac{2 \cdot (x+3)}{2 \cdot (x^2+6x)^{1/3}} dx$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Θέτω } u &= x^2+6x \\ du &= 2x+6 \Rightarrow \\ \Rightarrow du &= 2(x+3) dx \end{aligned} \right\}$$

$$= \int \frac{du}{2u^{1/3}} = \frac{1}{2} \int u^{-1/3} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{2/3}}{2/3} = \frac{3u^{2/3}}{4} = \frac{3}{4} \cdot (x^2+6x)^{2/3}$$

$$\text{i)} \int \sqrt{x^2 - 2x^4} dx = ?$$

→ Πρέπει να μελετήσω που είναι θετική η υπόριζη ποσότητα!

$$x^2 - 2x^4 > 0 \Rightarrow x^2(1-2x^2) > 0 \Rightarrow 1-2x^2 > 0$$